Infinito, un concetto finito

Yaroslav Sergeyev, studioso russo, ha "inventato" il "grossone", il numero naturale più grande di sempre. Che conseguenze avrà? Una rivoluzione nei metodi di calcolo di computer e calcolatrici

PISA
GABRIELE LOLLI
Scuola normale superiore

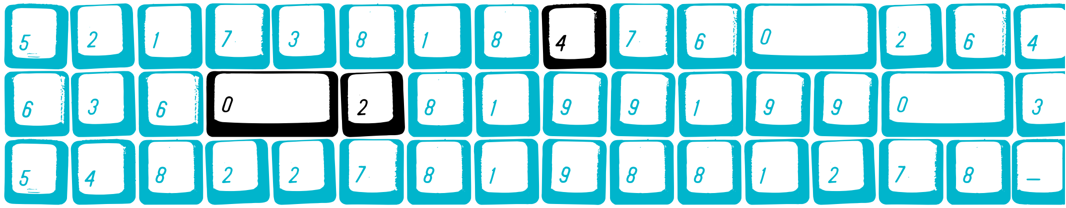
Uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, Leonhard Euler, inventava nel settecento "denominazioni matematiche" che i contemporanei consideravano con perplessità, non essendo sicuri della logica soggiacente. Euler trattava le somme infinite come se si trattasse di una somma finita, applicando le leggi algebriche di scomposizione e associazione che sono praticabili, appunto, unicamente con quantità finite. Grazie al suo grande istinto matematico, Euler trattava ∞ come un numero naturale, ottenendo risultati sorprendentemente corretti (*vedi nota 1 nel box*).
Anche oggi si continua ad usare il simbolo ∞: lo si fa nella teoria dei limiti, dove l'affermazione che una successione $\{a_n\}$ tende all'infinito

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \infty$$

dà luogo a un risultato, l'infinito appunto, che poi non si "gestisce", di fatto, visto che si incontrano quei "fenomeni" bizzarri che ci portano a scrivere $1 + \infty = \infty$ oppure ∞/∞, ovvero le ben note forme indeterminate, che appaiono anche nel calcolo dei limiti e che a volte si risolvono e altre no. Nella storia della matematica, poi, troviamo anche gli infinitesimi, oggetti più "subdoli" e "sfuggenti". Se trattiamo $+\infty$ come un numero, allora anche $1/{+\infty}$ lo sarà: è un numero positivo minore di tutti i numeri reali finiti usuali. (*vedi nota 2 del box*). Ciò significa che con grande intuito (come nel caso di Eulero) e con efficaci approssimazioni la matematica riesce a lavorare con le quantità infinitesime e infinite, ma non è ancora disponibile una teoria completa e soddisfacente – quella che si definisce una impostazione assiomatica - che svolga da cornice a questa operatività, legittimandola.
Yaroslav D. Sergeyev ha però recentemente elaborato una diversa proposta, più semplice nella concezione e più efficiente dal punto di vista del calcolo. Sergeyev è professore all'Università della Calabria, dove è arrivato grazie al lavoro svolto all'Università di Nizhni Novgorod (Russia); è noto internazionalmente per i suoi lavori sull'ottimizzazione globale.
Capire la metodologia seguita da Sergeyev è importante per capire la soluzione che offre; è anche interessante come proposta di filosofia della matematica, o per lo meno come esempio di come deve muoversi spregiudicatamente un matematico che voglia inventare qualcosa di nuovo. Sergeyev è scettico sull'uso di un'impostazione assiomatica per determinare un concetto, perché il risultato diventa dipendente dal linguaggio che si sceglie, e perché i concetti sfuggono in generale a una sola fissata determinazione: preferisce dare un insieme di regole generali per eseguire i calcoli, lasciando la porta aperta a sviluppi o modifiche suggerite dall'uso. Il suo trattamento dell'infinito è fondato su due punti fermi: il primo è l'assunzione che esistano oggetti infiniti e infinitesimi, ma che gli esseri umani (e le macchine) sono in grado di eseguire solo un numero finito di operazioni. È un punto di vista più concreto e realistico, di ispirazione più fisica che matematica. Il fisico, infatti, deve studiare simultaneamente una realtà e gli strumenti con i quali osserva questa realtà: migliori sono gli strumenti, maggiore l'informazione che riesce a cogliere; difettosi gli strumenti, deformata l'immagine che ne deriva. Per Sergeyev, i sistemi di notazione usati per esprimere i numeri e le operazioni su di esse sono gli strumenti di osservazione dei matematici, e ci si deve sempre preoccupare di migliorarli. Si può proporre, nel caso specifico di cui stiamo trattando, una curiosa analogia con quelle popolazioni dell'Amazzonia, come i Pirahã, che non hanno parole per esprimere i numeri, ma solo per concetti come "uno", "due" e "molti". Per loro, "1 + molti = molti", esattamente come per noi $1 + \infty = \infty$.
Si tratta, invece, di accettare un principio che i greci hanno messo all'inizio della loro indagine matematica: una delle nozioni comuni di Euclide è che "la parte è minore del tutto". Nella matematica moderna questo principio vale solo per insiemi finiti. Quando si affronta l'infinito, invece, il principio scompare. Prendiamo ad esempio l'insieme N dei numeri naturali (1, 2, 3, 4 e via discorrendo) e prendiamo l'insieme P dei numeri naturali pari. Scriviamo i due insiemi in questo modo:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
2 4 6 8 10 12 14 16 18 ...

È del tutto evidente che i numeri del primo insieme N possono essere messi in corrispondenza con tutti i numeri del secondo insieme P. Nell'attuale teoria matematica si parla di corrispondenza biunivoca, e si dice che i due insiemi hanno la stessa cardinalità, perché ad ogni elemento di N corrisponde uno e uno solo elemento di P. Nella visione più "fisica", come si è detto, di Sergeyev, prende corpo il dato di fatto che l'insieme P, invece, contiene la metà degli elementi dell'altro, N. Da qui nasce quindi il "grossone": Sergeyev, pensando forse contemporaneamente in inglese e in italiano, ha concepito la simpatica ambiguità di "gross one" e "grossone", che ben si adatta a un numero così grande. Il grossone è infatti un numero.
Sergeyev postula che il numero di elementi di N sia uguale a un numero che chiama "unità infnita", denotandola con il simbolo ① il grossone.
Ogni numero naturale finito n è tale che n < ①.
Al grossone si applicano le leggi algebriche di base:
0 · ① = ① · 0 = 0,
① - ① = 0,
① : ① =1,
①⁰=1,
1^① =1
Ecco allora che se ① è il numero degli elementi di N, ①/2 sarà l'insieme che contiene la metà di N, ovvero i numeri pari o i numeri dispari. L'insieme dei numeri naturali che si solito indichiamo con
N ={1, 2, 3, ...}
viene ora concepito come
N = {1, 2, 3, 4, 5, ... ①-5, ①-4, ①-3, ①-2, ①-1, ①}. (*vedi nota 3 nel box*)
Procedendo in questo modo si può applicare a infiniti e infinitesimi tutto il calcolo algebrico che già conosciamo, aprendo alla possibilità di una programmazione via computer. La struttura volutamente aperta della proposta di Sergeyev non si piega tanto facilmente a una analisi tradizionale. Tuttavia si può affermare con sicurezza che non vi sono contraddizioni nel calcolo del grossone.
Alcuni aspetti di questa teoria si prestano ad essere sfruttati anche dal punto di vista industriale. Un'iniziativa in tal senso è già in corso – per il momento ancora avvolta da una comprensibile riservatezza - e vede protagonista un pool di manager e di tecnici che comprende, oltre a Sergeyev stesso, anche Franco Caucci, direttore generale di Hublab - Italian Applications: «l'iniziativa che stiamo perseguendo ha come obiettivo la creazione di una società che sfrutti, dal punto di vista industriale, un aspetto della teoria del Professor Sergeyev, quello che abbiamo definito Infinity Computing», spiega Caucci. «Il principale settore applicativo dell'Infinity Computing è quello dei microprocessori per calcolatrici e computer e - più in particolare - del cacolo numerico. Lo scopo della società sarà realizzare e commercializzare una serie di prodotti che consentano di rendere enormemente più efficienti, in termini di velocità e di accuratezza, i metodi di calcolo attualmente utilizzati dalle calcolatrici e dai computer. Le applicazioni sono le più svariate, dalla matematica applicata, alla fisica, alla biologia, all'ingegneria e alle applicazioni industriali in generale.» Un primo prototipo di prodotto basato sulla teoria di Sergeyev è già stato realizzato: si chiama Infinity Calculator, ed è una calcolatrice virtuale in grado di operare con quantità infinite e infinitesime, proprio grazie all'utilizzo del grossone.



Nota 1) Per calcolare una somma come la seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Euler avrebbe ragionato come se si trattasse di una somma finita fino a un numero n_0 e si potessero applicare le seguenti leggi algebriche di scomposizione e associazione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{\infty+1} \approx 1$$

dove gy significa che la differenza è infinitesima, o qualche volta direttamente = 1. Euler era in grado quando necessario, con istinto infallibile, di trattare $+\infty$ come un numero naturale. ottenendo risultati corretti.

Nota 2) La difficoltà di un inserimento coerente e completo di questi "numeri" nell'algebra dei numeri reali ha portato alla loro eliminazione; nei testi di matematica, esclusi quelli dedicati ad argomenti specifici, come i campi non archimedei, che contengono infinitesimi: il simbolo non si trova, se non in formule come quella del limite di sopra, tutto sommato pleonastiche. Un'estensione coerente delle strutture classiche dell'analisi è stata trovata negli anni '60 da Abraham Robinson, sfruttando sofisticati risultati della logica matematica. La sua teoria è una rivalutazione di Leibniz e di tutta l'impostazione dell'analisi basata sugli infinitesimi; per quanto l'esposizione dei fondamenti dell'analisi che ne risulta sia elegante e anche intuitiva, in essa il ruolo principale è tuttavia svolto dagli infinitesimi, per la formulazione dei teoremi sulla continuità. Il calcolo con infiniti è macchinoso e di fatto solo teoricamente fattibile.

Nota 3) Osserviamo che, come ogni numero naturale può essere usato come base per la rappresentazione posizionale dei numeri, la stessa funzione può essere svolta da ① sicché ogni numero razionale può essere posto nella forma

$c_m ①^m + c_{m-1} ①^{m-1} + ... + c_1 ①^1 + c_0 + c_{-1} ①^{-1} + c_{-2} ①^{-2} + ... + c_{-k} ①^{-k}$,

dove i ci possono essere scelti, con opportune trasformazioni, come numeri finiti. In questo modo, il calcolo algebrico si estende immediatamente ai numeri infiniti e risulta facilmente programmabile. Un'applicazione interessante, tipica degli usi degli infinitesimi, è ad esempio nella soluzione di sistemi di equazioni lineari, quando i pivot sono 0. Lo 0 è sostituito dall'infinitesimo 1/① e alla fine dei calcoli si conserva solo la parte intera, tralasciando gli infinitesimi, come faceva Euler. Non è tutto così immediato; diverse applicazioni interessanti mostrate da Sergeyev, che continua a sviluppare la portata della sua idea, richiedono l'assimilazione attenta delle proprietà di questo calcolo, che mantiene tuttavia le promesse di semplicità, salvando al contempo le funzioni tradizionali note degli infinitesimi.